<u>ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</u>

- ☐ Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες αν και μόνο αν :

- ➢ D_f=D_g=A , έχουν ίδιο πεδίο ορισμού και
- ➢ f(x)=g(x), ∀ x∈A

<u>**Παρατήρηση**</u>**:** Το f(x)=g(x), ∀ x∈A **ΔΕΝ** σημαίνει απαραίτητα ίσους ή ίδιους τύπους.

Π.Χ. f(x)= $\frac{1}{x}$ +x-x και g(x)= $\frac{1}{x}$

οπού έχουν και οι δύο πεδίο ορισμού το $\Re^*$, είναι ίσες και δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

- ☐ Όταν δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε f=g.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

1η.) [Δύσκολη] Στις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν f=g και αν f≠g να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του ℜ στο οποίο να ισχύει f(x)=g(x)

i.) f(x)=$\frac{1}{\sqrt{2x}}$ και g(x)=$\frac{1}{\sqrt{3x-|x|}}$, ii.) f(x)=ln(e^{-x}+1) και g(x)=ln(e^{x}+1)= -x

iii.) f(x)=ln|x|-ln|x-1| και g(x)=ln($\frac{x}{x-1}$)

<u>Λύσεις</u> : i.) Για αρχή βρίσκω τα πεδία ορισμού.

Για το D_f : Πρέπει και αρκεί ($\sqrt{2x}$ ≠0 και 2χ≥0)⇔(χ≠0 και χ≥0)⇔χ>0

άρα D_f=(0,∞)

Για το D_g: Πρέπει και αρκεί ($\sqrt{3x-|x|}$≠0 και $3x-|x|$≥0) **(1)**

Αν χ≥0 , η **(1)**⇔($\sqrt{2x}$ ≠0 και 2χ≥0)⇔(χ≠0 και χ≥0)⇔χ>0

άρα σίγουρα (0,∞)⊆D_g

Αν x<0, η η **(1)**⇔($\sqrt{4x}$ ≠0 και 4χ≥0)⇔(χ≠0 και χ≥0)⇔χ>0, όμως υποθέσαμε πώς χ<0 άρα σε αυτή την περίπτωση δεν έχω δεκτές τιμές.

Τελικά, D_g=(0,∞)=D_f

Έπειτα ∀x∈D_g=(0,∞)=D_f , είναι g(x)=$\frac{1}{\sqrt{3x-|x|}}$= $\frac{1}{\sqrt{3x-x}}$ =$\frac{1}{\sqrt{2x}}$ =f(x)

άρα f=g

- ➔ Αν σε κάποια περίπτωση D_g≠D_f⇒f≠g .

ii.) Για το D_f : Πρέπει και αρκεί e^{-x}+1>0⇔ $\frac{1}{e^x}$+1>0 ⇔ 1+e^x>0, ισχύει ∀x∈ℜ

άρα D_f=ℜ

Για το D_g: Πρέπει και αρκεί e^x+1>0 , ισχύει ∀x∈ℜ, άρα D_g=ℜ

Τελικά, D_g= D_f=ℜ

επίσης f(x)=ln(e^{-x}+1)=ln($\frac{1}{e^x}$+1)=ln($\frac{e^x+1}{e^x}$)=ln(e^x+1)-ln(e^x)=ln(e^x+1)-x=g(x)

άρα f=g.

- ➔ Γίνεται χρήση των ιδιοτήτων: lne=1, lna^x=xlna , ln($\frac{a}{b}$)=lna-lnb.

iii.)Για το D_f : Πρέπει και αρκεί (|x|>0 και |x-1|>0) **(1)**

- ➔ Ένα απόλυτο είναι πάντα θετικό εκτός απο τις τιμές που το μηδενίζουν.

(1) ⇔**(**|x|≠0 και |x-1|≠0) ⇔ χ≠0 και χ≠1

οπότε D_f=ℜ\{0,1}

Για το D_g: Πρέπει και αρκεί ($\frac{x}{x-1}$>0 και χ-1≠0)⇔(χ(χ-1)>0 και χ≠1) **(2)**

πίνακας προσήμων:

x	-∞	0		1	+∞
x	-	0	+	+	+
x-1	-	-	-	0	+
x(x-1)	+	0	-	0	+

τελικά η **(2)**⇔(χ∈(-∞,0)∪(1,∞) και χ≠1) ⇔ χ∈(-∞,0)∪(1,∞)

άρα D_g=(-∞,0)∪(1,∞)≠D_f=ℜ\{0,1}

το ευρύτερο δυνατό κοινό υποσύνολο του ℜ των f και g είναι η τομή των πεδίων ορισμών τους δηλαδή το A= D_f∩D_g=(-∞,0)∪(1,∞)=D_g.

- ★ Το περιμέναμε αφού ισχύει γενικά: Αν A⊆B⇒A∩B=A

Στο κοινό αυτό διάστημα είναι f(x)=ln|x|-ln|x-1|=ln($\frac{|x|}{|x-1|}$)=ln|$\frac{x}{x-1}$|=ln($\frac{x}{x-1}$)=g(x).

Είναι ln|$\frac{x}{x-1}$|=ln($\frac{x}{x-1}$) αφού κατα την αναζήτηση του D_g απαιτήσαμε $\frac{x}{x-1}$>0

Άρα το ζητουμενο διάστημα είναι το (-∞,0)∪(1,∞).

2η.) Να βρείτε α,β,γ∈ℜ έτσι ώστε f=g, οπου f(x)=$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ και g(x)=$\frac{a}{x}$ + $\frac{\beta}{x+1}$ + $\frac{\gamma}{x+2}$

Για το D_f : Πρέπει και αρκεί $x(x + 1)(x + 2)$≠0 ⇔ χ≠0 και χ≠-1 και χ≠-2

άρα D_f=ℜ\{-2,-1,0}

Για το D_g:Πρέπει και αρκεί (χ≠0 και χ+1≠0 και χ+2≠0)⇔(χ≠0 και χ≠-1 και χ≠-2) άρα D_g=ℜ\{-2,-1,0}= D_f

Για να είναι όμως f=g πρέπει επίσης ∀χ∈ℜ\{-2,-1,0} , f(x)=g(x)⇔

⇔$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{x+2}$ ⇔ 1=α(x+1)(x+2) +βx(x+2)+γx(x+1)⇔

⇔1=α(x^2+3x+2) + β(x^2+2x) + γ(x^2+x) ⇔1=αx^2+3αx +2α +βx^2+2βx+γx^2+γx ⇔

1⇔1=(α+β+γ)x^2+(3α+2β+γ)x +2α **(1)**

ακολουθώ την ταύτιση πολυωνύμων και έτσι

η **(1)** ⇔(α+β+γ=0 και 3α+2β+γ=0 και 2α=1)⇔($\frac{1}{2}$+β+γ=0 και 2α+β=0 και α=$\frac{1}{2}$)⇔

⇔(α=$\frac{1}{2}$ και β=-1 και γ=$\frac{1}{2}$).

Τελικά, α=$\frac{1}{2}$, β=-1 και γ=$\frac{1}{2}$.

- ***<u>Υπενθύμιση</u>***: Ταύτιση πολυωνύμων:

Έστω δύο πολυώνυμα P(X)=$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$+...+$a_1$x +$a_0$

και Q(x)=$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1}$+...+$b_1$x +$b_0$, τότε

P=Q ⇔($a_n = b_n$ και $a_{n-1} = b_{n-1}$ και … και $a_1 = b_1$ και $a_0 = b_0$)

Δηλαδή δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν και μόνο αν οι συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων τους είναι ίσοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> 1.) Αν f(x) = $\frac{x+2}{x+a}$ και g(x)=$\frac{ax^2+a+1}{x+2-a}$ να βρεθεί α∈ℜ έτσι ώστε f=g

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> 2.) Να εξετάσετε αν f=g και αν f≠g να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του ℜ στο οποίο να ισχύει f(x)=g(x) αν

f(x)=$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ και g(x)=$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> 3.) Να εξετάσετε αν f=g

i.) f(x)=$\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$ και g(x)=$\frac{x+2}{x-2}$, ii.) f(x)=$\frac{x^2-4}{|x|+2}$ και g(x)=|x|-2

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> 4.) Να βρείτε α,β∈ℜ έτσι ώστε f=g αν f(x)=$\frac{4x}{x^2-x}$ και g(x)=$\frac{a}{x}$+ $\frac{\beta}{x-1}$

ΑΓΓΕΛΑΚΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ